Математическая логика

(mk.cs.msu.ru → Лекционные курсы → Математическая логика (группы 318, 241))

Лекция 4

Логическое следствие

Проблема общезначимости формул

Подстановки

Метод семантических таблиц
в логике предикатов

Корректность табличного вывода

Лектор:
Подымов Владислав Васильевич

E-mail:
valdus@yandex.ru

ВМК МГУ, 2019, весенний семестр

Вступление

Выполнимые необщезначимые формулы — это логические формы, которые служат для представления знаний, несущих в себе “нетривиальную” (“полезную”) информацию

Общезначимые формулы — это (*казалось бы*) банальности, тавтологии, знания, не несущие в себе никакой “полезной” информации

При этом общезначимые формулы в логике считаются чрезвычайно важными, и в курсе будут обсуждаться в основном такие формулы

Почему?

Логическое следствие

Предложение φ называется логическим следствием множества предложений F (F $\models \varphi$), если любая модель для F является моделью для φ, то есть если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \mathsf{F} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Если F — изначально имеющиеся "базовые" знания,
то логическое следствие φ — это
необходимо следующее из них "производное" знание

Пример-пояснение:

- $\forall x\, P(x) \models P(\mathbf{c})$: из знания "все предметы обладают свойством P" необходимо следует знание "предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P"
- $P(\mathbf{c}) \not\models \forall x\, P(x)$: из одного только частного знания "предмет, обозначенный символом **c**, обладает свойством P" не следует общее знание "все предеметы обладают свойством P"

Логическое следствие

Предложение φ называется логическим следствием множества предложений F ($F \models \varphi$), если любая модель для F является моделью для φ, то есть если для любой интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models F \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{I} \models \varphi$$

Если F — изначально имеющиеся “базовые” знания,
то логическое следствие φ — это
необходимо следующее из них “производное” знание

Одна из главных задач (и характерное проявление) интеллектуальной деятельности — это **извлечение логических следствий** из имеющихся баз знаний

Эта задача возникает в огромном числе областей “разумной деятельности”: экспертные системы, (автоматическое и ручное) доказательство теорем, формальный анализ программ, ..., ...

Логическое следствие (пример)

Покажем, что представляют собой логические следствия, на простом, но содержательном и показательном примере

Известно, что:

- Даша любит Сашу,
- а Саша любит пиво,
- а Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он

Любит ли кто-нибудь Дашу?

Попробуем записать эту задачу на языке логики предикатов

Начнём с сигнатуры алфавита; в неё войдут:

- константы **Даша**, **Саша**, **Паша**, **пиво**
- предикатный символ $\mathrm{L}^{(2)}$: $\mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) =$ “икс любит игрека”

Логическое следствие (пример)

Условия задачи переписываются так:

- Даша любит Сашу
$$\varphi_1\colon \mathrm{L}(\textbf{Даша}, \textbf{Саша})$$
- Саша любит пиво
$$\varphi_2\colon \mathrm{L}(\textbf{Саша}, \textbf{пиво})$$
- Паша любит пиво и всех тех, кто любит то же, что и он:
$$\varphi_3\colon \quad \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \textbf{пиво})$$
$$\varphi_4\colon \quad \forall \mathrm{x}\ (\exists \mathrm{y}\ (\mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{y})\ \&\ \mathrm{L}(\mathrm{x}, \mathrm{y})) \to \mathrm{L}(\textbf{Паша}, \mathrm{x}))$$
- Любит ли кто-нибудь дашу?
  Правда ли, что из знаний $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ необходимо следует знание
$$\varphi_0\colon \exists x\ L(\mathrm{x}, \textbf{Даша})\ ?$$

В конечном итоге задача переписывается так:

проверить соотношение $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_0$

Логическое следствие

Теорема(*о логическом следствии*). **Для любого предложения φ и любого множества предложений $\mathsf{F} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность**

$$\mathsf{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Rightarrow$): Предположим, что $\mathsf{F} \models \varphi$

Рассмотрим **произвольную** интерпретацию $\mathcal{I}$

Если $\mathcal{I} \not\models \mathsf{F}$, то $\mathcal{I} \not\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n$, а значит, $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Пусть теперь $\mathcal{I} \models \mathsf{F}$

Так как $\mathsf{F} \models \varphi$, имеем: $\mathcal{I} \models \varphi$ — а значит, снова верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Итог: для **любой** интерпретации $\mathcal{I}$ верно:

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Но это и означает общезначимость формулы $\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Логическое следствие

Теорема(*о логическом следствии*). Для любого предложения φ и любого множества предложений $\mathsf{F} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ справедлива равносильность

$$\mathsf{F} \models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \models \psi_1 \,\&\, \psi_2 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Доказательство. ($\Leftarrow$): Предположим, что $\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$

Рассмотрим **произвольную** модель $\mathcal{I}$ для множества F:

$$\mathcal{I} \models \psi_1, \qquad \dots, \qquad \mathcal{I} \models \psi_n$$

Тогда $\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n$

Так как формула $\psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$ общезначима, верно

$$\mathcal{I} \models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Согласно семантике "$\to$", это означает, что верно $\mathcal{I} \models \varphi$

Таким образом, **произвольная** модель $\mathcal{I}$ для множества F является моделью для φ, то есть $\mathsf{F} \models \varphi$

Проблема общезначимости формул

Чтобы уметь получать новые знания из имеющихся и анализировать достоверность знаний, необходимо понимать **законы**, связывающие достоверность различных знаний

Общезначимые формулы представляют собой один из способов записи таких законов — например, достоверность знаний φ, полученных из достоверных знаний $\mathsf{F} = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, равносильна общезначимости формулы

$$\models \psi_1 \,\&\, \dots \,\&\, \psi_n \to \varphi$$

Это показывает важность проблемы общезначимости формул:

для заданной формулы φ
проверить её общезначимость:
$\models \varphi$?

Проблема общезначимости формул

Решение этой проблемы будет сопряжено с ответами на простые и не очень простые вопросы:

- как общезначимость связана с выполнимостью и невыполнимостью?
- насколько проверка общезначимости/выполнимости/невыполнимости затрудняется наличием свободных переменных?
- как адаптировать *метод семантических таблиц* логики высказываний к логике предикатов?
- есть ли другие методы проверки общезначимости формул?
- насколько (теоретически) **трудно** проверить общезначимость формулы?
- ...

Проблема общезначимости формул

формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ общезначима

$\psi = \forall\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

$\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ $\quad$ $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}) = \neg\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ $\quad$ предложение ψ общезначимо

формула $\psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ невыполнима

$\varphi = \exists\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

$\varphi = \psi$ $\updownarrow$ противоположный ответ $\quad$ предложение φ невыполнимо

формула $\varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$ выполнима

$\psi = \exists\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}\ \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$

предложение ψ выполнимо

$\forall\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращение для $\forall\mathtt{x}_1 \ \ldots \forall\mathtt{x}_{\mathtt{n}}$

$\exists\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — сокращение для $\exists\mathtt{x}_1 \ \ldots \exists\mathtt{x}_{\mathtt{n}}$

Проблема общезначимости формул

Утверждение

$$
\begin{tikzcd}
\text{формула } \varphi(\widetilde{x}^n) \text{ общезначима} \arrow[r, bend left, "\psi = \forall \widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)"] \arrow[d, bend left, "\psi(\widetilde{x}^n) = \neg\varphi(\widetilde{x}^n)"] & \text{предложение } \psi \text{ общезначимо} \\
\text{формула } \psi(\widetilde{x}^n) \text{ невыполнима} \arrow[u, bend left, "\varphi(\widetilde{x}^n) = \neg\psi(\widetilde{x}^n)"] \arrow[r, bend left, "\varphi = \exists \widetilde{x}^n\ \psi(\widetilde{x}^n)"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi = \psi"', "\text{противоположный ответ}"] & \text{предложение } \varphi \text{ невыполнимо} \\
\text{формула } \varphi(\widetilde{x}^n) \text{ выполнима} \arrow[r, bend left, "\psi = \exists \widetilde{x}^n\ \varphi(\widetilde{x}^n)"] & \text{предложение } \psi \text{ выполнимо}
\end{tikzcd}
$$

Доказательство. Напрямую следует из определений выполнимости, невыполнимости и общезначимости

Проблема общезначимости формул

"Лобовой" способ проверки общезначимости формулы, аналогичный построению столбца значений булевой функции, мог бы представлять собой **перебор всех интерпретаций** с проверкой истинности в них формулы

Этот способ не подходит для логики предикатов:

- Как задать бесконечную интерпретацию и проверить истинность формулы в ней?
- Можно ли ограничиться перебором только какого-нибудь множества конечных интерпретаций?

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{z})) \to \exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\, \neg R(x,x) \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, (R(x,y) \,\&\, R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\, \forall y\, \neg R(x,y)$$

Формула φ необщезначима:

Предметная область: натуральные числа

$R(x,y) =$ “$x < y$”

Посылки φ: никакое число не может быть меньше себя

если $x < y$ и $y < z$ то $x < z$

Вывод φ: существует максимальное натуральное число

Посылки верны, но вывод неверен

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall x\ \neg R(x,x)\ \&\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (R(x,y)\ \&\ R(y,z) \to R(x,z)) \to \exists x\ \forall y\ \neg R(x,y)$$

А если предметная область конечна? *Например:*

Предметная область: все сотрудники компании N

$R(x,y) =$ "игрек является начальником икса"

Посылки φ: никто собой не командует
начальник начальника — тоже начальник

Вывод φ: есть тот, кому никто не указ

И посылки, и вывод верны

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathrm{x}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{x}) \,\&\, \forall \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \forall \mathrm{z}\, (\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \,\&\, \mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{z})) \to \exists \mathrm{x}\, \forall \mathrm{y}\, \neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

Общее истолкование:

“Если бинарное отношение R антирефлексивно и транзитивно, то существует элемент, максимальный относительно R”

Проблема общезначимости формул

Утверждение

Существует необщезначимое предложение, истинное в <u>любой</u> интерпретации с конечной предметной областью

Доказательство. Вот пример такого предложения φ:

$$\forall \mathrm{x}\,\neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{x})\,\&\,\forall \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,\forall \mathrm{z}\,(\mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})\,\&\,\mathrm{R}(\mathrm{y},\mathrm{z}) \to \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{z})) \to \exists \mathrm{x}\,\forall \mathrm{y}\,\neg \mathrm{R}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

Общее истолкование:

“Если R — отношение **строгого частичного порядка**, то существует элемент, максимальный относительно R”

Любое **конечное** непустое частично упорядоченное множество содержит максимальный элемент

(последнее можно легко доказать индукцией по числу элементов множества, либо просто сослаться на более общее утверждение: **лемму Цорна**) ▼

Метод семантических таблиц

Итог: никак нельзя решить проблему "$\models \varphi$?" явным перебором всех интерпретаций с проверкой истинности φ в каждой из них

Попробуем решить эту проблему при помощи метода семантических таблиц:

- рассуждая "от противного",
  попытаемся построить **контрмодель** $\mathcal{I}$: $\mathcal{I} \not\models \varphi$
- при построении будем работать с семантическими таблицами:
  предположениями о том,
  что выполняется и не выполняется в $\mathcal{I}$
- эти предположения структурируем в виде дерева вывода,
  строящегося по правилам табличного вывода

$$\frac{\mathsf{T}_0}{\mathsf{T}_1,\ (\mathsf{T}_2)}$$

- если **все** предположения **явно** опровергнуты
  закрытыми таблицами, то признаем формулу общезначимой

Метод семантических таблиц

Семантическая таблица (логики предикатов) — это пара множеств формул: $T = \langle\, \Gamma \mid \Delta \,\rangle$

Пусть $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все **свободные** переменные формул из $\Gamma \cup \Delta$

Таблица T выполнима, если существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$ из области интерпретации, такие что

- $\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для любой формулы φ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для любой формулы ψ из Δ

Таблица T закрыта, если $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

Таблица T атомарна, если содержит только атомы

Пример

Следующая семантическая таблица **выполнима**:

$$\langle\, \exists \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \neg \mathrm{P}(\mathrm{y}) \mid \forall \mathrm{x}\, \mathrm{P}(\mathrm{x}),\ \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\&\, \neg \mathrm{P}(\mathrm{x}) \,\rangle$$

(подтверждается интерпретацией: $\{d_1, d_2\}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_1) = \mathbf{t}$, $\overline{\mathrm{P}}(d_2) = \mathbf{f}$
и набором d_1, d_2 значений свободных переменных x, y)

Метод семантических таблиц

Теорема(*о табличной проверке общезначимости*)

$$\models \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{таблица } \langle \ \mid \varphi \ \rangle \text{ невыполнима}$$

Доказательство.

$$\models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathcal{I} \models \varphi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^{n}] \text{ для любой интерпретации } \mathcal{I}$$

$$\text{и любого набора предметов } \widetilde{d}^{n}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{таблица } \langle \ \mid \varphi \ \rangle \text{ невыполнима } \blacktriangledown$$

Утверждение. **Любая закрытая таблица невыполнима**

Утверждение

Любая незакрытая атомарная таблица выполнима

Доказательство (утверждений). Следует из определений атомарности, закрытости и выполнимости таблиц

Метод семантических таблиц

Основная проблема, возникающая при попытке адаптировать метод семантических таблиц *в логике высказываний* к логике предикатов: как сформулировать правила преобразования формул, начинающихся с $\forall$ и $\exists$?

Пример: $\models \forall x\, P(x) \to P(\mathbf{c})$?

$$\langle \ \mid \forall x\, P(x) \to P(\mathbf{c}) \ \rangle$$

$$\downarrow \longleftarrow \text{избавляемся от импликации } (R\to)$$

$$\langle \forall x\, P(x) \mid P(\mathbf{c}) \ \rangle$$

$$\downarrow ? \longleftarrow \textbf{подставляем} \text{ константу } \mathbf{c} \text{ на место } x$$

$$\langle \forall x\, P(x), P(\mathbf{c}) \mid P(\mathbf{c}) \ \rangle$$

Строго определим, что такое “**подставляем**”

Подстановки

Подстановка — это отображение $\theta : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}$

Область подстановки θ: $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x} \mid \mathtt{x} \in \mathsf{Var}, \theta(\mathtt{x}) \neq \mathtt{x}\}$

Подстановка конечна, если её область конечна

Subst — множество всех конечных подстановок

$\{\mathtt{x}_1/t_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}/t_n\}$ — это конечная подстановка θ, для которой верно:

- $\mathsf{Dom}_\theta = \{\mathtt{x}_1, \dots, \mathtt{x}_\mathtt{n}\}$
- $\theta(\mathtt{x}_\mathtt{i}) = t_i$ $\qquad (1 \leq i \leq n)$

Пара $\mathtt{x}_\mathtt{i}/t_i$ называется связкой

ε — это тождественная (пустая) подстановка: $\mathsf{Dom}_\varepsilon = \emptyset$

Подстановки

Пусть E — логическое выражение (терм или формула), и θ — подстановка.

Результат $E\theta$ применения подстановки θ к E определяется так:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{x}\theta = \theta(\mathrm{x}) & (\mathrm{x} \in \mathsf{Var}) \\
\mathbf{c}\theta = \mathbf{c} & (\mathbf{c} \in \mathsf{Const}) \\
\mathbf{f}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathbf{f}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (\mathbf{f} \in \mathsf{Func},\ t_1, \ldots, t_n \in \mathsf{Term}) \\
\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)\theta = \mathrm{P}(t_1\theta, \ldots, t_n\theta) & (\mathrm{P} \in \mathsf{Pred}) \\
(\varphi \,\&\, \psi)\theta = (\varphi\theta \,\&\, \psi\theta) & (\varphi, \psi \in \mathsf{Form}) \\
(\varphi \vee \psi)\theta = (\varphi\theta \vee \psi\theta) & \\
(\varphi \to \psi)\theta = (\varphi\theta \to \psi\theta) & \\
(\neg\varphi)\theta = (\neg\varphi\theta) & \\
(\forall \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\forall \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & (\theta'(\mathrm{x}) = \mathrm{x}; \\
(\exists \mathrm{x}\ \ \varphi)\theta = (\exists \mathrm{x}\ \ \varphi\theta') & \qquad \theta'(\mathrm{y}) = \theta(\mathrm{y}) \text{ для } \mathrm{y} \neq \mathrm{x})
\end{array}
$$

Подстановки

Пример применения подстановки

φ: $\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathtt{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathtt{x})) \vee \exists y\ \mathrm{P}(\mathtt{y}) \vee \mathrm{R}(\mathtt{u})$
θ: $\{\mathtt{x}/\mathbf{g}(\mathtt{x}, \mathbf{c}),\ \mathtt{y}/\mathtt{x},\ \mathtt{z}/\mathbf{f}(\mathtt{z})\}$

Выделяются все **свободные вхождения** переменных в φ

φ: $\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathtt{y})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathtt{x})) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{P}(\mathtt{y}) \vee \mathrm{R}(\mathtt{u})$

К этим вхождениям применяется θ

$\varphi\theta$: $\forall \mathtt{x}\ (\mathrm{P}(\mathtt{x}) \to \neg \mathrm{R}(\mathtt{x})) \to \mathrm{R}(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathtt{x}, \mathbf{c}))) \vee \exists \mathtt{y}\ \mathrm{P}(\mathtt{y}) \vee \mathrm{R}(\mathtt{u})$

Подстановки

При применении подстановок для выделения частных логических следствий следует соблюдать осторожность

Например:

$\varphi(\mathrm{x})$: $\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists y\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})$

"если у каждого есть дед, то у $\mathtt{x}$ тоже есть дед"

Очевидно, что $\models \varphi(\mathrm{x})$

Применим к φ подстановку $\theta = \{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$

$\varphi(\mathrm{x})\theta$: $\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \to \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{y},\mathrm{y})$

"если у каждого есть дед, то есть и тот, кто сам себе дед"

Очевидно, что $\not\models \varphi(x)\theta$

Почему смысл формулы после применения подстановки так исказился?

Подстановки

Переменная $\mathtt{x}$ свободна для терма t в формуле φ, если ни одно свободное вхождение переменной $\mathtt{x}$ не лежит в областях действия кванторов, связывающих переменные множества Var_t

Подстановка $\theta = \{\mathrm{x}_1/t_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}/t_n\}$ — правильная для формулы φ, если для каждой связки $\mathtt{x_i}/t_i$ переменная $\mathtt{x_i}$ свободна для терма t_i в формуле φ

Например, подстановка $\{\mathrm{x}/\mathrm{y}\}$ **не является правильной** для формулы

$$\forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \rightarrow \exists \mathrm{y}\ \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

а подстановка $\{\mathrm{x}/\mathbf{f}(\mathrm{u}, \mathrm{v})\}$ — **правильная** для этой формулы

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

правила для логических связок выглядят так же,
как и в логике высказываний:

$$L\& \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \,\&\, \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi,\ \psi \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\& \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \,\&\, \psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\vee \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \vee \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle} \qquad R\vee \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \vee \psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\!\rightarrow \frac{\langle\ \Gamma,\ \varphi \rightarrow \psi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \psi \mid \Delta\ \rangle, \langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle} \qquad R\!\rightarrow \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi \rightarrow \psi\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta,\ \psi\ \rangle}$$

$$L\neg \frac{\langle\ \Gamma,\ \neg\varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \varphi\ \rangle} \qquad R\neg \frac{\langle\ \Gamma \mid \Delta,\ \neg\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}$$

Метод семантических таблиц

Правила табличного вывода:

$$L\forall\,\frac{\langle\ \Gamma,\ \forall \mathrm{x}\,\varphi\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \forall \mathrm{x}\,\varphi,\ \varphi\{\mathrm{x}/t\}\ |\ \Delta\ \rangle} \qquad R\exists\,\frac{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \exists \mathrm{x}\,\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \exists \mathrm{x}\,\varphi,\ \varphi\{\mathrm{x}/t\}\ \rangle}$$

Дополнительное ограничение:

t — произвольный терм, такой что

подстановка $\{\mathrm{x}/t\}$ правильна для φ

$$L\exists\,\frac{\langle\ \Gamma,\ \exists \mathrm{x}\,\varphi\ |\ \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma,\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}\ |\ \Delta\ \rangle} \qquad R\forall\,\frac{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \forall \mathrm{x}\,\varphi\ \rangle}{\langle\ \Gamma\ |\ \Delta,\ \varphi\{\mathrm{x}/\mathbf{c}\}\ \rangle}$$

Дополнительное ограничение:

$\mathbf{c}$ — произвольная константа,

не содержащаяся в формулах из Γ, Δ и в φ

Метод семантических таблиц

Пара слов об ограничениях для правил $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$

Если разрешить использовать любые подстановки в $L\forall$, $R\exists$:

$$\frac{\langle\ \forall x\ \exists y\ P(x, y) \mid \exists y\ P(y, y)\ \rangle}{\langle\ \forall x\ \exists y\ P(x, y),\ \exists y\ P(y, y) \mid \exists y\ P(y, y)\ \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Если разрешить подставлять "несвежие" константы в $L\exists$, $R\forall$:

$$\frac{\langle\ \exists x\ P(x) \mid P(\mathbf{c})\ \rangle}{\langle\ P(\mathbf{c}) \mid P(\mathbf{c})\ \rangle}$$

— выполнимая таблица

— невыполнимая таблица

Метод семантических таблиц

Табличный вывод — это корневое дерево, размеченное семантическими таблицами, построенное по правилам вывода и по каждой конечной ветви завершающееся закрытой или атомарной таблицей

(дословно переносится из логики высказываний)

Успешный табличный вывод (табличное опровержение) — это конечный вывод, **все** листья которого помечены закрытыми таблицами

Определения, относящиеся к семантическим таблицам *логики высказываний*, удалось почти без изменений адаптировать к логике предикатов

К сожалению, с утверждениями об устройстве табличных выводов так поступить не выйдет — чтобы понять, почему, можно внимательно изучить несколько **примеров** табличных выводов

Примеры табличных выводов

$$\langle | \forall x\,(M(x) \to A(x)) \to (\forall x\, M(x) \to \forall x\, A(x)) \rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)) | \forall x\, M(x) \to \forall x\, A(x) \rangle$$

$$\Big\downarrow R{\to}$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)), \forall x\, M(x) | \forall x\, A(x) \rangle$$

$$\Big\downarrow R\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)), \forall x\, M(x) | A(\mathbf{c}) \rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)), \forall x\, M(x), M(\mathbf{c}) | A(\mathbf{c}) \rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$\langle \forall x\,(M(x) \to A(x)), \forall x\, M(x), M(\mathbf{c}) \to A(\mathbf{c}), M(\mathbf{c}) | A(\mathbf{c}) \rangle$$

$$\swarrow \quad L{\to} \quad \searrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \forall x\,(M(x) \to A(x)), \\ \forall x\, M(x), A(\mathbf{c}), M(\mathbf{c}) \end{array} | A(\mathbf{c}) \right\rangle \qquad \left\langle \begin{array}{l} \forall x\,(M(x) \to A(x)), \\ \forall x\, M(x), M(\mathbf{c}) \end{array} | A(\mathbf{c}), M(\mathbf{c}) \right\rangle$$

Закрытая таблица — Закрытая таблица

$$\models \forall x\,(M(x) \to A(x)) \to (\forall x\, M(x) \to \forall x\, A(x)) \quad (?)$$

Примеры табличных выводов

$$\langle | \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow R\rightarrow$$
$$\langle \exists x\, P(x) | \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle P(\mathbf{c_1}) | \forall x\, P(x) \rangle$$
$$\downarrow R\forall$$
$$\langle P(\mathbf{c_1}) | P(\mathbf{c_2}) \rangle$$

Незакрытая атомарная таблица

$\not\models \exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x) \quad (?)$

Примеры табличных выводов

$$\langle | \forall x\ \exists y\ P(x,y) \rightarrow \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow R\rightarrow$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y) | \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1},y) | \exists y\ \forall x\ P(x,y) \rangle$$
$$\downarrow R\exists$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), \exists y\ P(\mathbf{c_1},y) | \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow L\exists$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) | \exists y\ \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow R\forall$$
$$\langle \forall x\ \exists y\ P(x,y), P(\mathbf{c_1},\mathbf{c_3}) | \exists y\ \forall x\ P(x,y), P(\mathbf{c_4},\mathbf{c_2}) \rangle$$
$$\downarrow L\forall$$
$$\infty$$

(???)

Корректность табличного вывода

Лемма(о корректности правил табличного вывода)

Для любого правила табличного вывода $\frac{T_0}{T_1,\ (T_2)}$

($L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\to$, $R\to$, $L\neg$, $R\neg$, $L\forall$, $R\forall$, $L\exists$, $R\exists$)

таблица T_0 выполнима тогда и только тогда, когда выполнима таблица T_1 (или выполнима таблица T_2)

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правила $L\&$, $R\&$, $L\vee$, $R\vee$, $L\rightarrow$, $R\rightarrow$, $L\neg$, $R\neg$

Доказательство корректности этих правил *почти дословно* переносится из доказательства *той же леммы* для *логики высказываний* — нужно только:

- начать с "Пусть $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы"
- заменить "существует интерпретация $\mathcal{I}$" на "существуют интерпретация $\mathcal{I}$ **и набор предметов** $\widetilde{d}^n$"
- заменить (не)выполнимость формулы в интерпретации $\mathcal{I}$ на (не)выполнимость формулы в интерпретации $\mathcal{I}$ **на наборе предметов** $\widetilde{d}^n$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi, \varphi\{\mathtt{x}_0/t\} \mid \Delta\rangle\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, то она останется выполнимой

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d^n}$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}})[\widetilde{d^n}]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d^n}]$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\forall$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \forall \mathtt{x}_0\ \varphi, \varphi\,\{\mathtt{x}_0/t\} \mid \Delta\rangle\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если вычеркнуть формулу из выполнимой таблицы, то она останется выполнимой

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}^{\mathtt{n}}}$ — все свободные переменные формул нижней таблицы

При этом:

$$\mathcal{I} \models (\forall \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d^n}] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi[t[\widetilde{d^n}], \widetilde{d^n}] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{I} \models \varphi\,\{\mathtt{x}_0/t\}\,[\widetilde{d^n}]$$

Значит, нижняя таблица также выполнима

А где используется тот факт, что переменная $\mathtt{x}_0$ свободна для терма t в формуле φ?

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \exists \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \varphi\,\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle}$

($\Leftarrow$): *очевидно*: если "верно для $\overline{\mathbf{c}}$", то "существует предмет, для которого верно"

($\Rightarrow$): пусть верхняя таблица выполнима, и $\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}}$ — все свободные переменные формул верхней таблицы

Верхняя таблица выполнима $\Leftrightarrow$
существуют интерпретация $\mathcal{I}$ и набор предметов $\widetilde{d}^n$, такие что

- $\mathcal{I} \models \psi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{I} \not\models \chi(\widetilde{\mathtt{x}}^{\mathtt{n}})[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ
- $\mathcal{I} \models (\exists \mathtt{x}_0\ \varphi)[\widetilde{d}^n]$ — а значит, существует предмет d_0, такой что $\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Корректность табличного вывода

Доказательство.

Рассмотрим правило $L\exists$: $\dfrac{\langle\ \Gamma, \exists \mathtt{x}\ \varphi \mid \Delta\ \rangle}{\langle\ \Gamma, \varphi\,\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\} \mid \Delta\ \rangle}$

$\mathcal{I} \models \varphi[d_0, \widetilde{d}^n]$

Рассмотрим интерпретацию $\mathcal{J}$, отличающуюся от $\mathcal{I}$ только оценкой константы $\mathbf{c}$: $\overline{\mathbf{c}} = d_0$

Тогда $\mathcal{J} \models (\varphi\,\{\mathtt{x}/\mathbf{c}\})[\widetilde{d}^n]$

Кроме того,

- $\mathcal{J} \models \psi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы ψ из Γ
- $\mathcal{J} \not\models \chi[\widetilde{d}^n]$ для каждой формулы χ из Δ

Значит, нижняя таблица выполнима

А где используется тот факт, что $\mathbf{c}$ — “свежая” константа?

Для правил $R\forall$, $R\exists$ доказательство аналогично

Корректность табличного вывода

Теорема(*о корректности табличного вывода*)
Если для семантической таблицы T существует успешный табличный вывод, то таблица T невыполнима

Доказательство. Следует из определения табличного вывода, леммы корректности правил табличного вывода и утверждения о невыполнимости закрытых таблиц

Следствие. Если для таблицы $\langle \ \mid \varphi \rangle$ существует успешный табличный вывод, то $\models \varphi$

Ближайшие оставшиеся вопросы:

- Верно ли утверждение в обратную сторону?
  (*таблица невыполнима* $\Rightarrow$ *существует успешный вывод*)
- Можно ли (алгоритмически) **построить** успешный табличный вывод, если он существует?
- Есть ли более "приятные" методы проверки общезначимости?