§3. Логическое следствие

Опр. Формула G называется **логическим следствием** формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, если для любой интерпретации φ из того, что все значения $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_n)$ истинны, следует, что значение $\varphi(G)$ истинно.

Теорема 2. Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, тогда и только тогда, когда $F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_n \to G \equiv 1$.

Док-во аналогично доказательству теоремы 1 о равносильности ФЛВ.

<u>Опр.</u> Множество формул $F_1, F_2, \dots, F_m$ **выполнимо**, если существует интерпретация φ такая, что все значения $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \dots, \varphi(F_m)$ истинны и **невыполнимо** – в противном случае.

<u>Пример1.</u> Выполнимо ли множество формул $S = \{F, G, H\}$,
$F = Z \wedge \neg Y;\ G = X \,\&\, Y \leftrightarrow Z;\ H = (X \,\&\, Z) \vee Y.$

<u>Решение:</u> предположим, что множество выполнимо. Тогда существует интерпретация $\varphi : S \to \{0,1\}$ т.ч. $\varphi(F) = \varphi(G) = \varphi(H) = 1.$

$\varphi(F) = 1 \Rightarrow \varphi(X) = 1, \varphi(Y) = 0 \Rightarrow \varphi(G) = 0 \leftrightarrow 1 = 0.$ Противоречие, следовательно, множество S невыполнимо.

Теорема 3. Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n \Leftrightarrow$ множество формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ невыполнимо.

Доказательство:

$\Rightarrow$) Дано: G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Предположим, что $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ выполнимо, т.е. существует интерпретация φ такая, что все значения $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_n), \varphi(\neg G)$ истинны. Тогда $\varphi(G)$ ложно. Противоречие.

$\Leftarrow$) Дано: множество формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ невыполнимо. Для любой интерпретации φ среди значений $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_n), \varphi(\neg G)$ будет хотя бы одно ложное значение.

Для всех интерпретаций φ, таких, что $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_n)$ истинны, обязательно ложным будет $\varphi(\neg G)$. Тогда $\varphi(G)$ истинно.

Следовательно, G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Теорема доказана.

<u>Пример 2.</u> Является ли в примере 1 формула $N = \neg F$ *логическим следствием формул* G, H *?* $(G, H \models N?)$

<u>Ответ.</u> Да, т.к. множество формул $\{G, H, \neg N\} = \{F, G, H\} = S$ невыполнимо.

<u>Пример 3</u>. «Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или увеличится безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не увеличится. Безработица не возрастёт. Следовательно,

правительственные расходы не возрастут.” Проверить логичность рассуждения.

Решение.

$X =$ "*капиталовложения останутся постоянными*";

$Y =$ "*возрастут правительственные расходы*";

$Z =$ "*увеличится безработица*";

$U =$ "*налоги будут снижены*";

Необходимо проверить тождественную истинность формулы

$F = (X \to Y \vee Z) \wedge (\neg Y \to U) \wedge (U \wedge X \to \neg Z) \wedge \neg Z \to \neg Y,$

Или по теореме 2, то же самое, проверить логическое следование

$F_1, F_2, F_3, F_4 \models G,$ где

$F_1 = X \to Y \vee Z,\ F_2 = \neg Y \to U,\ F_3 = U \wedge X \to \neg Z,\ F_4 = \neg Z,\ G = \neg Y.$

Выясним, выполнимость множества $\{F_1, F_2, F_3, F_4, \neg G\}$.

$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \neg G = 1$ при $X = Y = U = 1, Z = 0.$

Следовательно, рассуждение нелогично.

Пример 4. «Джонс утверждает, что не встречал этой ночью Смита. Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал его этой ночью, а убийство было совершено после полуночи. Если убийство было совершено после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Следовательно, убийцей был Смит.” Проверить логичность рассуждения.

Решение.

$X =$ "*Джонс не встречал этой ночью Смита.*";

$Y =$ "*Смит – убийца*";

$Z =$ "*убийство было совершено после полуночи*";

$D =$ "*Джонс говорит правду*";

Необходимо проверить логическое следование

$F_1, F_2, F_3, F_4 \models G,$ где

$F_1 = D \leftrightarrow X$, $F_2 = X \to (Y \vee \overline{D}) \wedge (\overline{Y} \vee D)$, $F_3 = \overline{Y} \to X \wedge Z$, $F_4 = Z \to Y \vee \overline{D}$,

$G = Y$.

Покажем, невыполнимость множества $\{F_1, F_2, F_3, F_4, \neg G\}$. О/п. Пусть $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = \neg G = 1$. Тогда $Y = 0$. Следовательно, из $F_2 = F_3 = F_4 = 1$ следует, что $Z = X = 1$, $D = 0$. Но тогда из $F_1 = 1$ следует, что $X = 0$. Противоречие.

Следовательно, рассуждение логично.

§4. Нормальные формы

ДНФ и СДНФ

Опр. **Литерал** – атомарная формула (кроме 0 и 1), или ее отрицание.

Элементарная конъюнкция – литерал или конъюнкция литералов.

Опр. Формула *F* имеет **дизъюнктивно-нормальную форму** (ДНФ), если она является элементарной конъюнкцией или дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

$(\ldots . \,\&\, \ldots . \,\&\, \ldots) \vee (\ldots . \,\&\, \ldots .) \vee (\ldots \quad) \ldots$

Теорема 4. Для всякой формулы F существует равносильная формула, имеющая ДНФ.

Доказательство:

Алгоритм приведения к ДНФ.

1. Исключить эквиваленцию и импликацию (по законам 21 и 20).

2. Занести отрицание к атомарным формулам (по законам де Моргана 17 и 18).

3. К не элементарным конъюнкциям применить законы дистрибутивности (11 и 12).

<u>Пример 5</u>. Привести к ДНФ $F = \neg((X \to Y) \to Z)$.

1 шаг: $\neg((X \to Y) \to Z) \equiv \neg((\neg X \vee Y) \to Z) \equiv \neg[\neg(\neg X \vee Y) \vee Z]$.

2 шаг: $\equiv (\neg X \vee Y)\ \&\ \neg Z$.

3 шаг: $\equiv (\neg X\ \&\ \neg Z) \vee (Y\ \&\ \neg Z)$ – ДНФ.

<u>Пример 6</u>. Студент сдаёт зачёт по предмету «Логика» на философском факультете. Он ничего не знает потому, что не учил. Профессор даёт ему последнее задание:
«Если Вы, молодой человек, угадаете, сдадите ли Вы мне зачёт или нет, то я поставлю Вам зачёт, а если не угадаете, то не поставлю.»
Что должен ответить студент, чтобы получить зачёт?
(по мотивам задачи 12 из книги Смаллиана «Алиса в стране Смекалки»

Решение. Введём логические переменные (простые высказывания):

$X =$ "*Профессор поставит зачёт*";

$Y -$ *высказывание студента* :

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{"Я сдам зачёт"}, \\ 0, & \text{"Я не сдам зачёт"} \end{cases}$$

Необходимо проверить, при какой интерпретации (в узком смысле) истинна формула

$$F = \big((X \leftrightarrow Y) \to X\big) \& \big((X \leftrightarrow \overline{Y}) \to \overline{X}\big)$$

Применяя законы логики высказываний и применяя КНФ (2) для эквиваленции, полученную в примере 2 п.1, имеем

$$F = \left(\overline{X \leftrightarrow Y} \vee X\right) \& \left(\overline{X \leftrightarrow \overline{Y}} \vee \overline{X}\right) =$$

$$= \left(\overline{(X \vee \overline{Y}) \& (\overline{X} \vee Y)} \vee X\right) \& \left(\overline{(X \vee Y) \& (\overline{X} \vee \overline{Y})} \vee \overline{X}\right) =$$

$$= \left((\overline{X} \& Y) \vee (X \& \overline{Y}) \vee X\right) \& \left((X \& Y) \vee (\overline{X} \& \overline{Y}) \vee \overline{X}\right) =$$

$$= \overline{X} \& Y \vee X \& Y = \left(\overline{X} \vee X\right) \& Y = Y$$

Таким образом, $F = 1 \Leftrightarrow Y = 1$, и студент должен с уверенностью сказать: «Я сдам зачёт». Тогда профессор вынужден будет поставить ему зачёт. В противном случае, профессор не сможет ни поставить зачёт, ни не поставить зачёт.

Опр. Формула F имеет **совершенную дизъюнктивно-нормальную форму (СДНФ)** относительно атомарных формул $X_1, X_2, ..., X_n$, если:

1) в записи F участвуют только $X_1, X_2, \ldots, X_n$;
2) F имеет ДНФ, т.е. $F = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$;
3) Каждая C_i содержит или X_i, или $\neg X_i$, для любого i.
4) F не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Теорема 5. Для всякой выполнимой формулы F существует равносильная формула, имеющая СДНФ.

Доказательство:

Алгоритм приведения к СДНФ.

1 способ

1, 2, 3 – из алгоритма приведения к ДНФ.
Результат – формула $F = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$, равносильная исходной.

4. Если C_i не содержит ни X_i, ни $\neg X_i$, то заменяем C_i на $(C_i \,\&\, X_j) \vee (C_i \,\&\, \neg X_j)$.

5. Если F содержит несколько одинаковых элементарных конъюнкций, то вычеркиваем их все, кроме одной.

Пример 7. Привести к СДНФ
$F = \neg((X \to Y) \to Z)$.

1, 2, 3 шаги дают результат
$F \equiv (\neg X \,\&\, \neg Z\ ) \vee (Y \,\&\, \neg Z)$.

4 шаг: $\equiv (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg Y) \vee (Y \,\&\, \neg Z) \equiv$

$\equiv (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg Y) \vee (Y \,\&\, \neg Z \,\&\, X) \vee (Y \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg X)$.

5 шаг: т.к. первая и четвертая скобки совпадают, то одну вычеркиваем.
$\equiv (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg Y) \vee (Y \,\&\, \neg Z \,\&\, X)$.
$F = (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg Y) \vee (Y \,\&\, \neg Z \,\&\, X)$.

Составим таблицу истинности формулы F:

X	Y	Z	F	
0	0	0	1	вторая скобка
0	0	1		
0	1	0	1	первая скобка
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0	1	третья скобка
1	1	1		

Замечание: существует и другой способ приведения формулы к СДНФ.

Для аргументации этого способа приведём другое доказательство теоремы 4, из которого, в частности, будет следовать усиление теоремы 5:

Теорема 6. Для всякой выполнимой формулы F существует равносильная формула, имеющая СДНФ, единственная с точностью до перестановки дизъюнктов и литералов в каждой элементарной конъюнкции.

Доказательство.

Обозначим через $x^{\varepsilon} = x$, если $\varepsilon = 1$ и $x^{\varepsilon} = \overline{x}$, если $\varepsilon = 0$. Непосредственно проверяется

Лемма. $x^{\varepsilon} = 1 \Leftrightarrow x = \varepsilon$ для $\varepsilon \in \{0,1\}$

Докажем, что любая ФЛВ $F(x_1,...,x_n) \equiv D(x_1,...,x_n)$, где ДНФ

$D(x_1,...,x_n) = \bigvee_{(\alpha_1,...,\alpha_n)\in M} x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n}$ и $M = \{(\alpha_1,...,\alpha_n) \mid F(\alpha_1,...,\alpha_n) = 1\}$.

Пусть $F(\alpha_1,...,\alpha_n) = 1 \Rightarrow (\alpha_1,...,\alpha_n) \in M \Rightarrow$ конъюнкция $d(x_1,...,x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n}$ является дизъюнктом ДНФ $D(x_1,...,x_n)$. По лемме $d(\alpha_1,...,\alpha_n) = 1 \Rightarrow D(x_1,...,x_n) = 1$.

Обратно, аналогично: пусть $D(\beta_1,...,\beta_n) = 1 \Rightarrow$ $d(\beta_1,...,\beta_n) = 1$ для некоторого дизъюнкта $d(x_1,...,x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge ... \wedge x_n^{\alpha_n}$, где $(\alpha_1,...,\alpha_n) \in M$.

Тогда по лемме $(\beta_1,...,\beta_n)=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in M \Rightarrow$

$F(\beta_1,...,\beta_n)=1.$

Итак, $F(x_1,...,x_n)\equiv D(x_1,...,x_n).$

Теорема доказана.

<u>Пример 8.</u>

Привести к СДНФ $F = \neg((X \to Y) \to Z)$.

Второй способ.

1 шаг: Составить таблицу истинности F

X	Y	Z	$X \to Y$	$((X \to Y) \to Z$	F
0	0	0	1	0	1

0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

2 шаг: используя строки, в которых значение равно 1, записываем СДНФ.

КНФ и СКНФ

Элементарная дизъюнкция – литерал или дизъюнкция литералов.
Опр. Формула *F* имеет **конъюнктивно-нормальную форму (КНФ)**, если она является элементарной дизъюнкцией или конъюнкцией элементарных дизъюнкций.
(…. ∨ …. ∨ …) & (…. ∨ ….) & (…) …

Опр. Формула *F* имеет **совершенную конъюнктивно-нормальную форму (СКНФ)** относит. атомарных формул $X_1, X_2, \ldots, X_n$, если:

1) в записи *F* участвуют только $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

2) *F* имеет КНФ, т.е. $F = D_1 \& D_2 \& \ldots \& D_k$;

3) Каждая D_i содержит или X_j, или $\neg X_j$, для любого *j*.

4) F не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций.

Замечание. Если формула F имеет ДНФ (СДНФ), то $(\neg F)$ после занесения отрицания к атомарным формулам будет иметь КНФ (СКНФ).
Отсюда следуют следующие теоремы.

Теорема 7. Для всякой формулы F существует равносильная формула, имеющая КНФ.
Теорема 8. Для всякой формулы F, не являющейся тождественно истинной, существует равносильная формула, имеющая СКНФ, единственная с точностью до перестановки конъюнктов и литералов в каждой элементарной дизъюнкции.

Пример9. В одной местности расположены два гор. И и Л. Жители города И всегда говорят правду, города Л – всегда лгут. Как, попав в один из этих городов, узнать у первого встречного название города?

Решение. Коль скоро ответ встречного зависит то его правдивости, обозначим x = "Ты правдив." Поскольку нас интереует название города, обозначим y = "Это город И." Теперь из высказываний x и y сконструируем высказывание p так, что, услышав от встречного ответ "Да" на вопрос "Верно ли, что p=И", мы поймём, что находимся в И.

x	y	Слышимый ответ	Понимаемый ответ	p
0	0	нет	да	1
0	1	**да**	нет	0
1	0	нет	нет	0
1	1	**да**	да	1

Следовательно, $p = (x^0 \wedge y^0) \vee (x^1 \wedge y^1) = (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)$.

Ты лжец и это город лжи или ты правдивец и это город истины? То же самое “Ты житель этого города?»